x	0		π
$f_\alpha(x)$	‖	+	‖
$f_\alpha(x)$	‖ 0	↗	‖ $+\infty$

c) $f_\alpha(\frac{\pi}{\alpha+1}) = \frac{\sin(\alpha\frac{\pi}{\alpha+1})}{\sin(\frac{\pi}{\alpha+1})} = \frac{\sin(\frac{\alpha\pi+\pi-\pi}{\alpha+1})}{\sin(\frac{\pi}{\alpha+1})}$

$= \frac{\sin(\pi-\frac{\pi}{\alpha+1})}{\sin(\frac{\pi}{\alpha+1})} = \frac{\sin(\frac{\pi}{\alpha+1})}{\sin(\frac{\pi}{\alpha+1})} = 1$.

3°/ f_α est continue et strictement croissante sur $]0,\pi[$ donc f_α est une bijection de $]0,\pi[$ sur $]\alpha,+\infty[$ et comme $\alpha+\frac{1-\alpha^2}{2} \in]\alpha,+\infty[$ donc il admet un seul antécédent de $]0,\pi[$ par f_α ce qui prouve que (E) admet une solution dans $]0,\pi[$.

Solution 18 :

1°/a) f est définie, continue et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = 1+\tan^2 x > 0$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	‖	+	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	‖ $+\infty$

b) $\Delta : y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow \Delta : y = x$.

c) Etudions le signe de $f(x)-x$.

Soit $g(x) = f(x)-x$; g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $g'(x) = f'(x)-1 = \tan^2 x \geq 0$.